

# Zur allgemeinen Formulierung der Fließbedingung unter Berücksichtigung der Anisotropie und des Bauschinger-Effektes

A. Troost und J. Betten

Institut für Werkstoffkunde der Rhein.-Westf. Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforsch. **30 a**, 492–496 [1975]; eingegangen am 8. März 1975)

*On the general Formulation of Yield Conditions under Consideration of Anisotropy and Bauschinger-Effect*

In this paper, some aspects of the isotropic and anisotropic yield conditions are discussed on the base of the plastic potential by introduction of partial potentials. The significance of the Bauschinger-Effect is investigated, in order to describe the mechanical behavior of materials in which the magnitude of the uniaxial yield strength depends on the sign of stress. This generalized concept is successfully applied to titanium sheets. The theory is compared with experimental results.

## Einleitung

Ausgehend von einem plastischen Potential<sup>1</sup>

$$F = F(\sigma_{ij}) \quad (1)$$

( $\sigma_{ij}$  Spannungstensor) ermittelt man über die Fließregel

$$d^p \varepsilon_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda; d\lambda \geq 0 \quad (2)$$

( $\varepsilon_{ij}$  plastischer Anteil des Verzerrungstensors  $\varepsilon_{ij}$ ;  $d\lambda$  Proportionalitätsfaktor) die Stoffgleichungen. Mit (1) wird das Fließkriterium dargestellt als Äquipotentialfläche

$$F(\sigma_{ij}) = c = \text{const}, \quad (3)$$

die gemäß Fließregel und Stabilitätskriterium<sup>2</sup>,

$$d\sigma_{ij} d^p \varepsilon_{ij} \geq 0, \quad (4)$$

konvex sein muß<sup>3</sup>.

Neben der Richtungsabhängigkeit der Fließgrenzen (mechanische Anisotropie) beobachtet man im Experiment ggf. auch die Abhängigkeit vom Vorzeichen der Beanspruchung, d. h. den Bauschinger-Effekt, der analytisch über ein plastisches Potential (1) als ungerade Funktion,

$$F(-\sigma_{ij}) \neq F(\sigma_{ij}), \quad (5)$$

erfaßt werden kann.

## Formulierung bei Isotropie

Im isotropen Sonderfall wird das plastische Potential auch durch

$$F = F(J_1, J_2, J_3), \quad (6)$$

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr.-Ing. A. Troost, Institut für Werkstoffkunde, Reinisch-Westfälische Technische Hochschule, D-5100 Aachen, Postfach.

wie zuerst bei Mises<sup>1</sup> erwähnt bzw. bei Inkompresibilität durch

$$F = F(J_2', J_3') \quad (7)$$

ausgedrückt<sup>4</sup>. Darin sind  $J_1, J_2, J_3$  die Invarianten des Spannungstensors und ( $J_1' \equiv 0$ )  $J_1', J_2', J_3'$  die entsprechenden Invarianten des Spannungsdeviators  $\sigma_{ij}'$ . Beispielsweise lautet das quadratische plastische Potential nach Mises<sup>5</sup> bei Isotropie  $F = J_2'$  mit  $F(-\sigma_{ij}) = F(\sigma_{ij})$ . Ein anderes Beispiel ohne Bauschinger-Effekt ist das Druckersche Potential<sup>3, 4</sup>

$$F = J_2'^3 = \alpha J_3'^2, \quad -\frac{9}{4} \leq \alpha \leq \frac{27}{8}, \quad (8)$$

das in Abb. 1\* dargestellt ist und nur geringfügig von Mises abweicht.

Dagegen kann durch die wesentlich einfachere Linearkombination

$$F = J_2' + \alpha \frac{J_3'}{\sigma_F}, \quad -3 \leq \alpha \leq \frac{3}{2} \quad (9)$$

( $\sigma_F$  Zugfließgrenze) ein spezieller Bauschinger-Effekt erfaßt werden, bei dem die charakteristische Differenz zwischen den Beträgen von Zug- und Druckfließgrenzen richtungsunabhängig ist, wie man Abb. 2 entnehmen kann.

## Allgemeine Formulierung für Anisotropie

In Anlehnung an den isotropen Fall (6) kann man allgemein ansetzen:

$$F = F(F_1, F_2, F_3) \quad (10)$$

\* Neben dem Tresca-Sechseck stellt auch das in Abb. 1 eingezeichnete äußere Sechseck eine Begrenzung im Hinblick auf die Konvexität von Fließortkurven dar.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

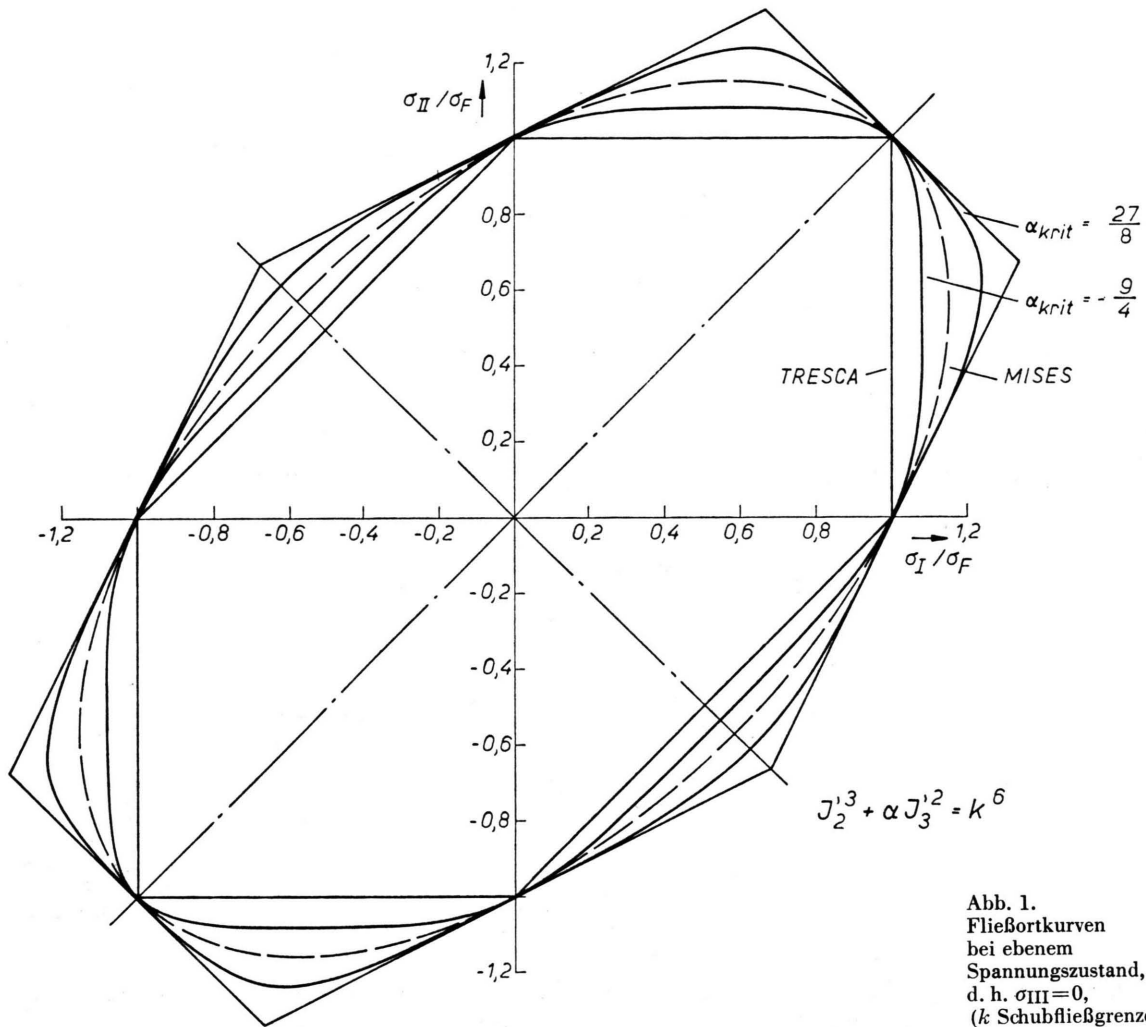


Abb. 1.  
Fließortkurven  
bei ebenem  
Spannungszustand,  
d. h.  $\sigma_{III} = 0$ ,  
( $k$  Schubfließgrenze).

mit den skalaren Formen (Teilpotentiale):

$$F_1 = A_{ij} \sigma_{ij} \quad (\text{lineare Form}), \quad (11 \text{ a})$$

$$F_2 = \frac{1}{2} A_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (\text{quadratische Form}), \quad (11 \text{ b})^{**}$$

$$F_3 = \frac{1}{6} A_{ijklmn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} \quad (\text{kubische Form}), \quad (11 \text{ c})$$

mit  $A_{ij}$ ,  $A_{ijkl}$  und  $A_{ijklmn}$  als Stofftensoren 2-ter, 4-ter und 6-ter Stufe, die entscheidend in die Stoffgleichungen eingehen. Man kann auch entgegen (11) den Deviator  $\sigma_{ij}'$  einführen und entsprechend definieren:

$$F_1' = A_{ij}' \sigma_{ij}', \quad F_2' = \frac{1}{2} A_{ijkl}' \sigma_{ij}' \sigma_{kl}' \quad \text{usw.} \quad (12)$$

so daß das plastische Potential (10) die Form

$$F = F(F_1', F_2', F_3') \quad (13)$$

annimmt. Die Benutzung des Deviators bietet Vorteile im Fall der *plastischen Volumenkonstanz* (Inkompressibilität).

Da  $F_1$  und  $F_3$  gemäß den Definitionen (11 a) und (11 c) ungerade Funktionen der dynamischen Variablen ( $\sigma_{ij}$ ) sind und die Stofftensoren im allgemeinen keine *isotropen* Tensoren darstellen, lassen sich mit den Größen  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  im Potential (10) Bauschinger-Effekt und Anisotropie erfassen. Außerdem gestatten sie einen zwanglosen Übergang zum isotropen Sonderfall (6), wenn man die Stofftensoren als Kugeltensoren ansetzt, z. B. geht für  $A_{ij} = \delta_{ij}$  die lineare Form (11 a) über in die erste Invariante  $J_1$  usw.<sup>6</sup>

\*\* Mises<sup>1</sup> formuliert Gl. (11 b) in Koordinatenschreibweise.

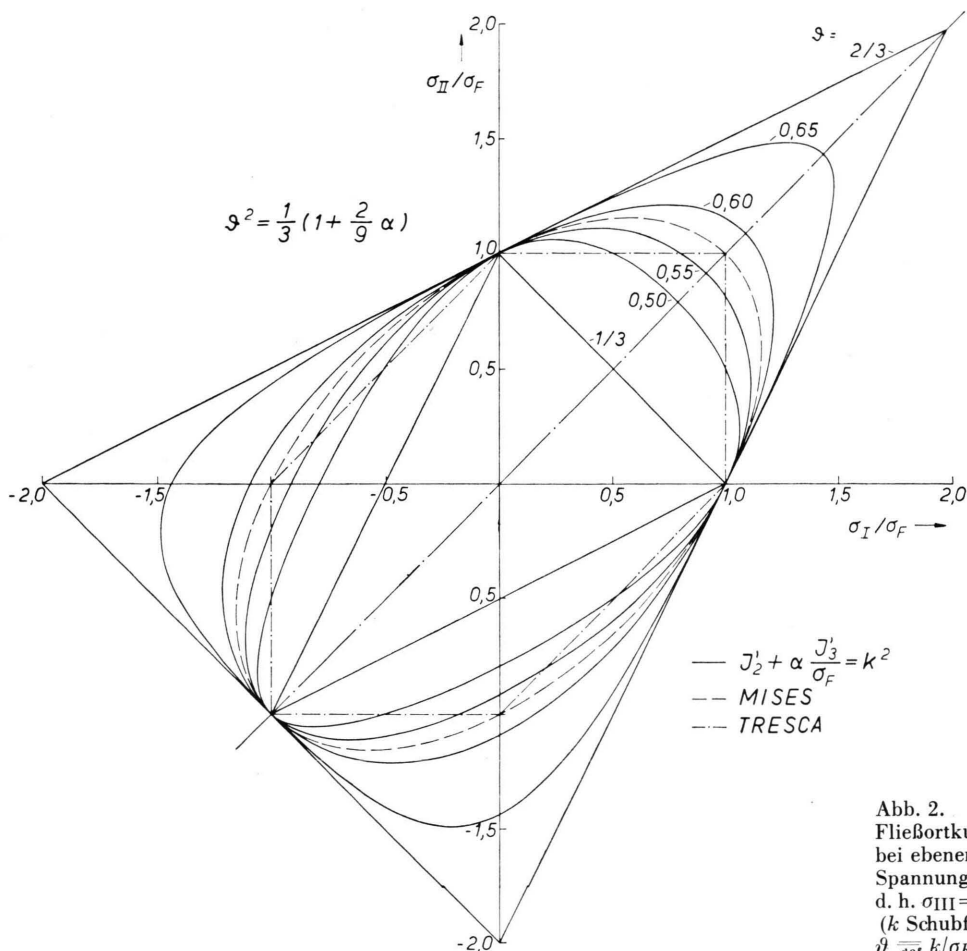


Abb. 2.  
Fließortkurven  
bei ebenem  
Spannungszustand,  
d. h.  $\sigma_{III} = 0$ ,  
( $k$  Schubfließgrenze,  
 $\vartheta \frac{\partial}{\partial \sigma} k/\sigma_F$ ).

Ein möglicher Ansatz für ein Potential (10) ist in Form einer Linearkombination aus  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$  gegeben:

$$F = a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 F_3. \quad (14)$$

Das entspricht wegen (11) einer „Potenzreihenentwicklung“ in  $\sigma_{ij}$ , z. B. für  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$  der Reihe:

$$F = A_{ij} \sigma_{ij} + \frac{1}{2} A_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \frac{1}{3} A_{ijklmn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn}. \quad (15)$$

Damit lauten die Stoffgleichungen:

$$d^p \varepsilon_{ij} = (A_{ij} + A_{ijkl} \sigma_{kl} + A_{ijklmn} \sigma_{kl} \sigma_{mn}) d\lambda. \quad (16)$$

Das Potential (10) ist noch formal erweiterungsfähig, z. B. in der Form:

$$F = F(F_1, F_2, F_3, \dots, F_\varrho, \dots, F_\omega);$$

$$F_\varrho = \frac{1}{\varrho} A_{ijkl \dots qr} \sigma_{ij} \dots \sigma_{qr}. \quad (17)$$

Für diese Form bieten sich u. a. Linearkombinationen und Polynomansätze an:

$$F = \sum_{\alpha=1}^{\omega} a_\alpha F_\alpha;$$

$$F = \sum_{\alpha=1}^{\omega} b_\alpha F_\alpha^{r(\alpha)}, \quad \text{z. B. } r(\alpha) = \frac{\omega}{\alpha} r(\omega). \quad (18)$$

Hierzu sind einige Beispiele in Tab. 1 eingetragen.

### Vergleich mit dem Experiment

Die Anisotropieeigenschaften und der Bauschinger-Effekt werden durch die Stofftensoren  $A_{ij}$ ,  $A_{ijkl}$  usw. beschrieben. Die Bestimmung ihrer Koordinaten erfolgt z. B. aus experimentell gefundenen Daten und/oder nach kristallographischen Gesichtspunkten. U. a. liegen experimentell ermittelte Fließortkurven von Zircaloy-4-Hüllrohren, Magnesium-Bleichen, Titan-Bleichen, Fließortkurven von Kupfer-

Stoffverhalten				Potential	Typ	Literatur
A	B	I	K			
-	-	+	-	$F = J'_2$	Linearkomb.	1913 <sup>5</sup>
+	-	+	+	$F = F_2$	Linearkomb.	1928 <sup>1</sup>
-	+	-	+	$F = \alpha J'_1 + J'_2$	Linearkomb.	1946 <sup>7</sup>
-	-	+	-	$F = J'_2 + \alpha J'_3$	Polynom	1947 <sup>4</sup>
-	+	+	-	$F = J'_2 + \alpha (J'_3/\sigma_F)$	Linearkomb.	1973 <sup>8</sup>
-	-	-	+	$F = \alpha J'_1 + J'_2$	Polynom	$\kappa=2; \mu=1$ 1973 <sup>9</sup>
-	+	+	+	$F = P_\kappa(J_1) + P_\mu(J'_2)$	$\kappa, \mu$ gzz.	1975 <sup>10</sup>
-	+	+	+	$F = P_\kappa(J_1) + P_\nu(\sqrt{J'_2})$	$\kappa, \nu$ gzz.	
+	+	+	+	$F = \alpha F_1 + F_2$	Linearkomb.	1974 <sup>6</sup>
+	+	+	+	$F = F'_2 + \alpha F'_3$	Linearkomb.	

Tab. 1. Beispiele für Potentialansätze.

A  $\triangleq$  Anisotropie;  
 B  $\triangleq$  Bauschinger-Effekt;  
 I  $\triangleq$  inkompressibel;  
 K  $\triangleq$  kompressibel;  
 /  $\triangleq$  oder.

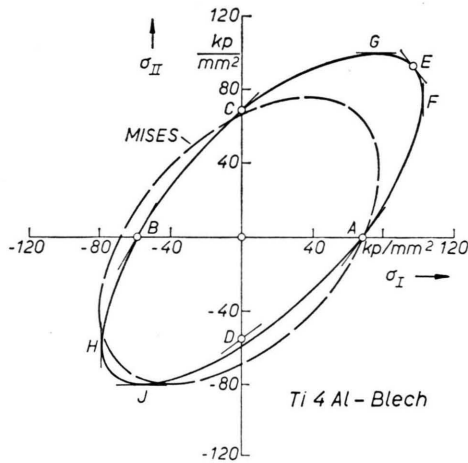
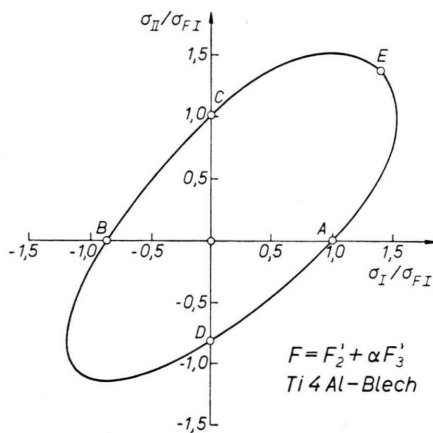
Abb. 3. Experimenteller Befund<sup>11</sup> (Ti4Al-Blech).

Abb. 4. Gerechnete Fließortkurve.

rohrproben mit unterschiedlichen Texturen, Fließortkurven von AlMgSi1-Rohren mit gleicher Textur, aber unterschiedlichem Auslagerungszustand vor, um einige Werkstoffe besonderer technischer Bedeutung zu nennen.

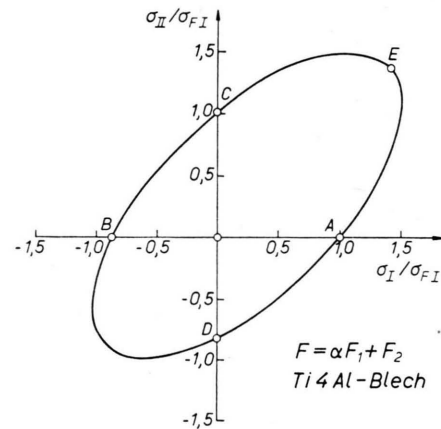
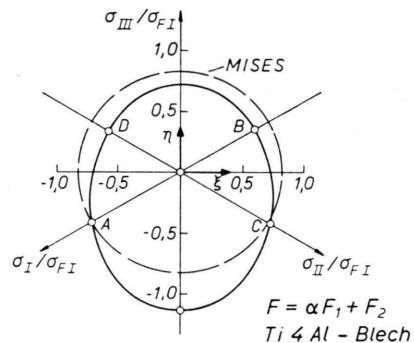
Abb. 5. Gerechnete Fließortkurve in  $\sigma_I$ - $\sigma_{II}$ -Hauptspannungsebene.

Abb. 6. Gerechnete Fließortkurve in der Oktaederebene.

Zur Bestimmung der Anisotropie- und Bauschinger-Koeffizienten sind für die folgenden Beispiele die experimentellen Daten Versuchen an einem Titanblech von Lee und Backofen<sup>11</sup> entnommen (Abbildung 3).

In Analogie zum isotropen Ansatz (9) ist der anisotrope Ansatz  $F = F'_2 + \alpha F'_3$  [Gln. (12) und (13)] unter Berücksichtigung des experimentellen

Befundes gemäß Bild 3 numerisch ausgewertet und in Abb. 4 dargestellt.

Einfacher für die numerische Auswertung ist der Ansatz  $F = \alpha F_1 + F_2$  mit einem *linearen* Bauschinger-Effekt (Abb. 5 und 6).

<sup>1</sup> R. v. Mises, Z. angew. Math. Mech. **8**, 161 [1928].

<sup>2</sup> D. C. Drucker, Proc. 1st. U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., 487 (1951).

<sup>3</sup> A. Troost u. J. Betten, Mech. Res. Comm. **1**, 73 [1974].

<sup>4</sup> D. C. Drucker, Proc. 1st. Annual Symposium for Appl. Math., Am. Math. Soc. (1947).

<sup>5</sup> R. v. Mises, Nachr. d. Kgl. Gesellsch. d. Wissensch., Göttingen, Math. phys. Klasse, 582 (1913).

<sup>6</sup> J. Betten, Vortrag, Seminar über Technologische Mechanik der Werkstoffe, Institut für Werkstoffkunde, RWTH Aachen (1974).

<sup>7</sup> C. Torre, Oesterr. Ing.-Archiv **1**, 36 [1946].

<sup>8</sup> J. Betten, Vorlesung, Festigkeit der Werkstoffe I (Plastizitätstheorie metallischer Werkstoffe), RWTH Aachen (1973).

<sup>9</sup> A. Troost u. J. Betten, Z. Metallkde. **64**, 822 [1973].

<sup>10</sup> M. Schlimmer, Dr.-Ing.-Dissertation, Technische Hochschule Aachen 1975.

<sup>11</sup> D. Lee u. W. A. Backofen, Trans. Met. Soc. AIME **236**, 1077 [1966].